Applications linéaires - Dualité

11 novembre 2020

1 Applications linéaires

2 Dualité

1. Applications linéaires.

Dans tout ce chapitre le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

1.1. Applications linéaires.

Définition 1.1

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K.
Une application $f : E \to F$ est dite linéaire si :

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in E$. (Additivité).
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in E$, $\lambda \in K$. (Homogénéité).

Définition 1.2

L'ensemble des applications linéaires de E dans F se note $\mathfrak{L}(E,F)$.
Soif $f \in \mathfrak{L}(E,F)$.

1. f est un **isomorphisme** d'espaces vectoriels si f est bijective.
   L'ensemble des isomorphismes se note $Isom(E,F)$.
2. f est dit **endomorphisme** si $E = F$.
   L'ensemble des endomorphosmes de E se note $\mathfrak{L}(E)$.
3. f est dit **Automorphisme** de l'espace E si f est un endomorphisme bijective de E, leurs ensemble se note $Aut(E)$.
4. f est dit **forme linéaire** si $F = \mathbb{K}$.
   L'ensemble des formes linéaires sur E se note $\mathfrak{L}(E,\mathbb{K})$ ou E^* appelé **duale** de E.

Remarque 1.3

$\mathfrak{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec les lois :

1. $f+g : E \to F$ tel que $x \to f(x)+g(x)$.
2. $\lambda f : E \to F$ tel que $x \to \lambda f(x)$.

Exemples 1.4

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y) = (-x,y)$.
2. L'homothétie de rapport λ : $f : E \to F$ définie par $f(x) = \lambda x$.
3. L'application dérivation $D : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ définie par $D(P) = P'$. où P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et P' sa dérivée.

Question : est ce que la translation définie est une application linéaire ?

Définition 1.5 (Noyau- Image)

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1. le noyau de f, noté $\ker(f)$, est défini par $\ker(f) = f^{-1}\{0\} = \{x \in E / f(x) = 0\}$.
2. l'Image de f, noté $Im(f)$, est défini par $Im(f) = \{f(x)/x \in E\}$.

Remarques 1.6 :

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1. L'image d'un sous espace vectoriel de E, par f, est un sous espace vectoriel de F.
   En particulier $Im(f)$ est un sous espace vectoriel de F.
2. L'image réciproque d'un sous espace vectoriel de F, par f, est un sous espace vectoriel de E.
   En particulier $\ker(f)$ est un sous espace vectoriel de E.

Proposition 1.7

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1. f est injective si, et seulement si $\ker(f) = \{0\}$.
2. f est surjective si, et seulement si $Im(f) = F$.

Preuve= exercice.

Théorème 1.8

Soient E et F deux $\mathbb{K}$- espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.
L'application $\phi : E/\ker(f) \to Im(f)$, définie par $\phi(\overline{x}) = f(x)$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
En particulier, $E/\ker(f)$ et $Im(f)$ sont isomorphe.

$E/\ker(f) = \{\overline{x}/x \in E\}$ l'espace quotient de E par F.

Corollaire 1.9

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E.
Alors $dim(E/F) = dim(E) - dim(F)$.

Preuve : Soit G un supplémentaire de F dans E. On considère la projection sur G parallèlement à F :
$P : E = F \oplus G \to E$ (c'est une application linéaire).
On a : $\ker(P) = F$ et $Im(P) = G$.
Donc, d'après le théorème 1.8, E/F et $Im(f) = G$ sont isomorphes.
En particulier :

$$dim(E/F) = dim(G) = dim(E) - dim(F).$$

.

Définition 1.10 : (Rang d'une application linéaire)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$- espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire.
On appelle rang de f, noté $rg(f)$, la dimension du sous espace $Im(f)$.

$$rg(f) = dim(Im(f)).$$

Théorème 1.11 (du rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$- espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire.
Alors $dim(E) = dim(\ker(f) + dim(Im(f)) = dim(\ker(f) + rg(f)$.

Preuve :
On sait que $dim(E/\ker(f)) = dim(Im(f))$ (d'après Théorème 1.8)
et que $dim(E/\ker(f)) = dim(E) - dim(\ker(f))$ (Corollaire 1.9).
Donc : $dim(Im(f)) = dim(E) - dim(\ker(f))$, ce qui montre le résultat.

Question

Est que E est somme directe de $\ker(f)$ et $Im(f)$?
Contre- exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (0, x)$.
(dans ce cas $\ker(f) = Im(f) = \{(0, x)/x \in \mathbb{R}\}$).

Proposition 1.12 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$- espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire.

1. Si $dim(E) = dim(F)$ alors
   f est injective $\iff$ f est surjective $\iff$ f est bijective.
2. $dim(\mathfrak{L}(E, F)) = dim(E).dim(F)$.

1.2. Applications linéaires et matrices.

Définition 1.13

Soient E et F deux $\mathbb{K}$- espaces vectoriels de dimension finie : $dim(E) = n$ et $dim(F) = m$ et $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $B = \{e_1, ..., e_m\}$ une base de E, $B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ une base de F. On appelle matrice de l'application f, dans les bases B et B', la matrice , notée $M(f)_{BB'} \in \mathfrak{M}_{nm}(\mathbb{K})$, dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $f(e_1), ...f(e_m)$ dans la base $B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$.

c.à.d $M(f)_{BB'} = (a_{ij})$ où $f(e_i) = a_{1i}e'_1 + ... + a_{mi}e'_m$ pour $i = 1...n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ .. & .. & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

$f(e_1) = a_{11}e'_1 + ... + a_{n1}e'_n$

.....

$f(e_m) = a_{1m}e'_1 + ... + a_{nm}e'_n.$

Exemple 1.14

(1). Soit $E = \mathbb{K}^2$ munit de la base canonique $B = \{e_1, e_2\}$. On considère l'application $f : E \to E$ définie par $f(x, y) = (x, 0)$.
Vérifier que

$$M(f)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Exercice 01 : On considère l'endomorphosme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (-3x - 2y, x + y)$.
Donner la matrice de f par rapport à la base canonique.

Exemple 1.14

(2). Soient $E = \mathbb{K}_4[X]$ et $F = \mathbb{K}_3[X]$.
On considère l'application dérivation $D : E \to F$ définie par $D(P) = P'$.
$B = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ base de E
$B' = \{1, X, X^2, X^3\}$ base de F
Vérifier que

$$M(D)_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

Définition 1.15 (Matrice de passage)

Soient E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension finie : $dim(E) = n$.
Soit $B = \{e_1, ..., e_m\}$ et $B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ deux bases de E.
On appelle matrice de passage de B à B' la matrice, notée
$P_{BB'} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = (P_{ij})_{i,j=1...n}$,
dont les coefficients sont définis par les égalités :

$$e'_i = \sum_{j=1}^{j=n} P_{ji} e_j$$

Exercice 02

Pour $P \in \mathbb{R}_1[X]$, on pose

$$\phi(P) = (X-a)(X-b)P' - (X - \frac{a+b}{2})P,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a \neq b$.
(1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$.
(2) Donner la matrice de ϕ da base canonique B_0 de $\mathbb{R}_1[X]$.
(3) Montrer que la famille $B = \{X-a, X-b\}$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.
(4) Déterminer la matrice M de ϕ dans la base B.
(5) Déterminer l'expréssion de M^n où $n \in \mathbb{N}$.

2. Dualité

2.1. Forme linéaire - Espace dual.

Définition 2.1

Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel.
Toute application linéaire $f : E \to \mathbb{K}$ est appelée **forme linéaire** sur E.
L'espace des formes linéaires sur E, noté $E^* = \mathfrak{L}(E, \mathbb{K})$, est appelé : **espace dual** de E

$\phi \in E^* \iff \phi : E \to \mathbb{K}$ est une application linéaire.

Proposition 2.2

Si E est un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension finie,
alors E^* l'est aussi et on
$dim(E^*) = dim(E)$.

Preuve : $dim(E^*) = dim(\mathfrak{L}(E, \mathbb{K})) = dim(E).dim(\mathbb{K}) = dim(E)$

2.1. Forme linéaire - Espace dual.

Exemple 2.3 : Caractérisation des formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

(1) Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ un vecteur fixé dans $\mathbb{K}^n$
l'application $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ définie par $\phi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, est une forme linéaire de $\mathbb{K}^n$.

Exercice : **Réciproquement** : si $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire, montrer qu'il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\phi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$.

2.1. Forme linéaire - Espace dual.

Exemple 2.3

(2) l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x + y$, est une forme linéaire.

Exemple 2.3

(3) Soit $a \in \mathbb{R}$.
l'application $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P) = P(a)$, est une forme linéaire.

Exemple 2.3.

(4) l'application $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y, z) = 2x + 3y - 5z$, est une forme linéaire.

2.2. Hyperplan.

Définition 2.4

Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel.
On appelle hyperplan de E, le noyau de toute forme linéaire non nulle sur E.
Autrement dit,
H est hyperplan de $E \iff \exists f \in E^*$ tel que $f \neq 0$ et $H = \ker(f)$.
et on a $H = \{x \in E / f(x) = 0\}$.
On dit, aussi, que H est un hyperplan d'équation $f(x) = 0$.

Exemple 2.5

(1) $H = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / Tr(A) = 0\}$ est un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$.
En effet : $H = \ker(Tr)$ où $Tr : A \to Tr(A)$, l'application trace, est bien une forme linéaire de $M_n(\mathbb{R})$.

Exemple 2.5

(2) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + 3z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2.5

(3) $H = \{P \in \mathbb{K}[X] / \quad P(0) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 2.6

Soit H un sous espace vectoriel de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. H est un hyperplan de E.
2. Il existe une droite D de E telle que $E = H \oplus D$.
   Si de plus l'espace E est de dimension finie n, alors les conditions précédentes sont équivalentes à :
3. $dim(H) = dim(E) - 1 = n - 1$.

Preuve :

Remarque 2.7

Si $dim(E) = n$, soit $B = \{e_1, ..., e_n\}$ une base de E.
Relativement à la base B, tout hyperplan H de E admet une équation unique, à un scalaire multiplicatif près, de la forme :

$$a_1.x_1 + ... + a_n.x_n = 0$$

où $x_1, ..., x_{1n}$ sont les coordonnées du vecteur x dans la base B.

Exemple 2.8

1. Un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ est de la forme $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax + by + cz = 0\}$: c'est un plan de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
2. Un hyperplan de $\mathbb{R}^2$ est de la forme $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by = 0\}$: c'est une droite de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2.9 :

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in E^*$.

$$\ker(f) = \ker(g) \iff \exists \alpha \in \mathbb{K} \ \textit{tel que} \ f = \alpha g.$$

Preuve :

$(\Longleftarrow)$ évident

$(\Longrightarrow)$. Posons $H = \ker(f) = \ker(g)$

Si $f = 0$, alors $g = 0$ car $E = \ker f = \ker g$.

Supposons, donc, que L'application f (g) est non nulle donc il existe $u \in E$ tel que $u \notin H$.

Posons $\alpha = \dfrac{f(u)}{g(u)}$ et montrons que $f = \alpha g$.

En effet : soit $x \in E$. D'après la proposition précédente $E = H \oplus \mathbb{K}u$, donc $x = h + \lambda u$ où $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

D'où

$f(x) = f(h) + \lambda f(u) = \alpha \lambda g(u)$

et $g(x) = g(h) + \lambda g(u) = \lambda g(u)$.

ce qui montre que $f(x) = \alpha g(x)$, cqfd.

2.3. Base duale.

Proposition et définition 2.10 :

Soit $B = \{e_1, ..., e_n\}$ une base d'un $\mathbb{K}$- espace vectoriel E de dimension finie.
Pour tout $i = 1, ..., n$ on définit les formes linéaires (appelées formes coordonnées) $e_1^*, ..., e_n^*$ par les relations de Kronecker suivantes :

$$e_i^*(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$$

pour tout $i, j = 1, ..., n$.
La famille $B^* = \{e_1^*, ..., e_n^*\}$ est une base de l'espace dual E^*, appelée : **base duale de** E associée à la base B.

Preuve :

Proposition 2.11 :

Soit $B = \{e_1, ..., e_n\}$ une base d'un $\mathbb{K}$- espace vectoriel E et $B^* = \{e_1^*, ..., e_n^*\}$ sa base duale. Alors on a :

$$(1) : \quad Pour \ \ tout \ \ x \in E \quad : x = \sum_{i=1}^{i=n} e_i^*(x) e_i.$$

$$(2) \ \ Pour \ \ tout \ \ \varphi \in E^* \quad : \varphi = \sum_{i=1}^{i=n} \varphi(e_i) e_i^*.$$

$$(3) \ \ Pour \ \ tout \ \ f \in \mathfrak{L}(E) : \quad a_{ij} = e_i^*(f(e_j))$$

où $M_B(f) = (a_{ij})$ désigne la matrice de f dans la base B.

Preuve :

Proposition 2.12

(1). Pour toute forme linéaire non nulle $\varphi \in E^*$, $\exists x \in E$ tel que $\varphi(x) = 1$.
(2). Pour tout vecteur non nul $x \in E$ non nul, $\exists \varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) = 1$.

Preuve :
(1) Si $\varphi \in E^*$ est une forme linéaire non nulle, alors il existe $u \in E$ tel que $\varphi(u) \neq 0$.
Si on prend $x = \frac{u}{\varphi(u)}$, on obtient $\varphi(x) = 1$.
(2) Si $x \in E$ et $x \neq 0$, $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i$ où $B = \{e_1, ..., e_n\}$ est une base de E.
alors, il existe i_0 tel que $x_{i_0} \neq 0$ c.à.d $e^*_{i_0}(x) = x_{i_0}$
la forme linéaire $\varphi = \frac{1}{e^*_{i_0}(x)} e^*_{i_0}$ règle l'affaire.

Méthode pratique pour déterminer la base duale.

Proposition 2.13 (changement de la base duale)

Soient B_1 et B_2 deux bases d'un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension finie E et soit P la matrice de passage de B_1 à B_2.
Alors la matrice de passage de B_1^* à B_2^* est $(P^{-1})^t$ (la transposée de P^{-1}

Preuve :

Posons $B_1 = \{e_1, ..., e_n\}$ et $B_2 = \{f_1, ..., f_n\}$
et soit $P = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de B_1 à B_2.
On sait que $f_k = \sum_{l=1}^{n} a_{lk} e_l$ pour tout $k = 1....n$.
Soit $Q = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de B_1^* à B_2^*.
donc $f_j^* = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i^*$ pour tout $j = 1....n$.

Méthode pratique pour déterminer la base duale.

Et pour tout $j, k = 1....n$, on a

$$f_j^*(f_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i^* (\sum_{l=1}^{n} a_{lk} e_l)$$

$$f_j^*(f_k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} b_{ij} e_i^* (a_{lk} e_l)$$

$$f_j^*(f_k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} b_{ij} a_{lk} \delta_{il}$$

$$\delta_{jk} = f_j^*(f_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} a_{ik} = (Q^t P)_{jk}$$

où $(QP)_{jk} = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ik}$
d'où $(QP)^t = I$, ce qui montre que $Q = \quad (P^{-1})^t$.

Méthode pratique pour déterminer la base duale.

Exemple 2.15

On considère les vecteurs : $u(-3;-1;1)$, $v(5;2;-1)$ et $w(6;2;-1)$de $\mathbb{R}^3$ exprimés dans la base canonique $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$.

(1) Montrer que la famille $B = \{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer la base duale de B.

Méthode pratique pour déterminer la base duale.

Exercice 01

On considère les vecteurs : $u(-3;-2;7)$, $v(3;-1;-5)$ et $w(1;-3;0)$de $\mathbb{R}^3$ exprimés dans la base canonique $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$.

(1) Montrer que la famille $B = \{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer la base duale de B.

Théorème 2.16 : base préduale ou anté-duale

Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension finie.
Toute base B^* de E^* est la base duale d'une base unique B de E, appelée **base préduale** de B^*.

Preuve :

Méthode pratique pour déterminer la base duale.

Exemple 2.17 : détermination de la base préduale

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on note B_0 la base canonique et B_0^* sa base duale.
On considère trois formes linéaires définis sur $\mathbb{R}^3$ par :
$\varphi_1(x, y, z) = x + 2y + 3z$
$\varphi_2(x, y, z) = 2x + 3y + 4z$
$\varphi_3(x, y, z) = 3x + 4y + 5z$
On pose $\mathcal{F} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

(1) Vérifier que $\mathcal{F}$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

(2) Déterminer la base préduale de la base $\mathcal{F}$.

Méthode pratique pour déterminer la base duale.

Exemple 2.18 : détermination de la base préduale

Dans $E = \mathbb{R}_1[X] = \{aX + b / \quad a, b \in \mathbb{R}\}$.
Soient $f_1, f_2 \in E^*$ tel que pour tout $P \in E = \mathbb{R}_1[X]$
$f_1(P) = \int_0^1 P(t)dt$ et $f_2(P) = \int_0^2 P(t)dt$.
(1) Montrer que $B^* = \{f_1, f_2\}$ est une base de E^*.
(2) Déterminer la base préduale de la base B^*.

2.4. Bidual d'un espace vectoriel.

Définition 2.19

Soit E d'un $\mathbb{K}$- espace vectoriel.
Le dual de l'espace E^*, noté E^{**}, est appelé **le bidual de E.**

Proposition 2.20

Soit E d'un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension finie n.
Alors les espaces vectoriels E et E^{**} sont isomorphes.

Preuve :

Remarques 2.20

(1) Cet isomorphisme permet d'identifier E à E^{**}.
(2) Dans le cas de dimension infinie l'application ϕ est injective, mais pas nécessairement surjective. Et l'espace E apparait comme un sous espace vectoriel de E^{**}.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION